

Бесконечно малый элемент объема в n -мерных сферических координатах

Этот элемент равен произведению определителя матрицы G – якобиану преобразования координат (3) на соответствующие дифференциалы:

$$dV = \text{Det}[G] dr d\alpha_0 d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-2}. \quad (7)$$

Столбцами матрицы G являются векторы – производные радиус-вектора $\mathbf{R}$ по аргументам $r, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}$.

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r} & \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha_{n-2}} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Можно показать, что все вектор-столбцы в матрице G попарно ортогональны, при этом детерминант матрицы равен произведению норм этих векторов:

$$\det[G] = \left\| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha_0} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha_1} \right\| \cdot \dots \cdot \left\| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha_{n-2}} \right\|. \quad (9)$$

Расписывая эти нормы по индукции и подставляя выражение (9) в (7), получаем

$$dV_n = \cos^{n-2} \alpha_{n-2} \dots \times \dots \times \cos^1 \alpha_1 \cos^0 \alpha_0 r^{n-1} dr d\alpha_0 d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-2}. \quad (10)$$

Пусть область интегрирования функции $F(r, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2})$ в сферических координатах ограничена гладкой замкнутой гиперповерхностью S , и при этом радиус-вектор, исходящий в любом направлении, пересекает эту поверхность изнутри наружу один раз, т. е. угол между нормалью к внешней стороне поверхности и радиус-вектором всегда меньше $\pi/2$. В этом случае с учетом полных пределов изменения углов (6) представим интеграл от этой функции в виде

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-2} \alpha_{n-2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-3} \alpha_{n-3} \dots \times \dots \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^1 \alpha_1 \int_0^{2\pi} \cos^0 \alpha_0 \int_0^{R_e} r^{n-1} \times \dots \times F(r, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-3}, \alpha_{n-2}) dr d\alpha_0 d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-3} d\alpha_{n-2}, \quad (11)$$

где $R_e \equiv R_{\text{end}}(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-3}, \alpha_{n-2})$ – длина радиус-вектора, исходящего от начала координат в направлении, заданном углами $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-3}, \alpha_{n-2}$, до конечной точки пересечения с поверхностью.

Чтобы, например, вычислить объем n -мерного шара радиуса r_0 , надо принять в формуле (11) длину радиус-вектора и удельную плотность постоянными, соответственно равными

$$R_e = r_0 \text{ и } F(r, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-3}, \alpha_{n-2}) = 1.$$

После необходимых преобразований получим объем n -мерного шара в виде

$$V_S = \begin{cases} 2(2\pi)^{(n-1)/2} r_0^n [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot n]^{-1}, & \text{если } n - \text{нечетное,} \\ (2\pi)^{n/2} r_0^n [2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot n]^{-1}, & \text{если } n - \text{четное.} \end{cases} \quad (12)$$

Результаты выражение (12) совпадают с известными формулами для объема n -мерного шара [1, 2], полученными «формальным» и косвенным способами, соответственно, что подтверждает достоверность вышеприведенных выводов и формул, полученных автором путем использования многомерных сферических координат.

Необходимые свойства многократных сферических интегралов

Возьмем в выражении (11) $(j+1)$ раз интегралы по аргументам $r, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}$ и обозначим интеграл, зависящий от параметров $\alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{n-2}$, как

$$I_j \equiv I_j(\alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{n-2}) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{j-1} \alpha_{j-1} \dots \times \dots \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^1 \alpha_1 \int_0^{2\pi} \cos^0 \alpha_0 \int_0^{R_e} r^{n-1} \times \dots \times F(r, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}/\alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{n-2}) dr d\alpha_0 d\alpha_1 \dots d\alpha_{j-1}, \quad (13)$$

где $R_e \equiv R_{\text{end}}(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}/\alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{n-2})$.

Отметим, что кратность интеграла (13) по аргументам – углам $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}$ равна j . Запишем связь между интегралами, имеющими кратности по углам $(j+1)$ и j :

$$I_{j+1}(\alpha_{j+1}, \alpha_{j+2}, \dots, \alpha_{n-2}) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^j \alpha_j I_j(\alpha_j/\alpha_{j+1}, \alpha_{j+2}, \dots, \alpha_{n-2}) d\alpha_j. \quad (14)$$

Обозначим подынтегральную функцию по углу α_j как

$$f_j \equiv f_j(\alpha_j/\alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{n-2}) = \cos \alpha_j I_j(\alpha_j/\alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{n-2}), \quad (15)$$

а численные значения производных на границах интервалов интегрирования как

$$f_j^{(2k-1)} = \frac{\partial^{2k-1} f_j}{\partial \alpha_j^{2k-1}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad |\alpha_j| = \pm \pi/2$$

$$I_j^{(2m)} = \frac{\partial^{2m} I_j}{\partial \alpha_j^{2m}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots; \quad |\alpha_j| = \pm \pi/2 \quad (16)$$

Отметим необходимые далее свойства единичного вектора направления $\mathbf{e}$ и составляющих его направляющих косинусов I_j , в окрестности точек $\alpha_j = \pm \pi/2 \pm \Delta\alpha_j$:

$$\begin{cases} \mathbf{e} |_{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j = \pm(\pi/2 - \Delta\alpha_j)}; \\ \mathbf{e} |_{\alpha_0 - \pi, -\alpha_1, -\alpha_2, \dots, \alpha_j = \pm(\pi/2 + \Delta\alpha_j)}. \end{cases} \quad (17)$$

Нетрудно убедиться, что направляющие косинусы (3) будут равны для отсчетов углов, записанных слева и справа в выражении (17), и что такое равенство соблюдается по углам с любыми номерами $(j =$

$= 1, 2, \dots, n-2$), взятыми в качестве полюсов $\alpha_j = \pm\pi/2$, если проинвертировать значения углов с меньшими номерами $\alpha_i = -\alpha_i$ ($0 < i < j$), а угол с нулевым номером изменить как $\alpha_0 = \alpha_0 - \pi$. Следовательно, если единичный вектор направления пересекает полюс по углу $\alpha_j = \pm\pi/2$, перемещаясь на величину $\pm\Delta\alpha_j$, то для этого вектора единственным образом находится равный вектор направления, при этом диапазоны интегрирования по углам с меньшими номерами приводятся к прежним диапазонам

$$-\pi/2 \leq -\alpha_i \leq \pi/2, -\pi \leq \alpha_0 - \pi \leq \pi. \quad (18)$$

Кроме того, частичный элемент объема в подпространстве размерности $(j+1)$

$$dV_{j+1} = \cos^{j-1} \alpha_{j-1} \dots \times \dots \cos^1 \alpha_1 \cos^0 \alpha_0 r^{n-1} dr d\alpha_0 d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-2} \quad (19)$$

при такой замене углов не меняется.

Из перечисленных свойств следуют свойства четности интегралов $I_j(\alpha_j)$ относительно полюсов $\alpha_{pj} = \pm\pi/2$:

$$I_j(\alpha_{pj} + \Delta\alpha_j) = I_j(\alpha_{pj} - \Delta\alpha_j). \quad (20)$$

Из свойств четности интегралов $I_j(\alpha_j)$ несложно доказать полезные (и необходимые далее) свойства равенства нулю всех производных нечетного порядка от подынтегральных функций по углам с четными номерами

$$f_j^{(2k-1)} = 0, \alpha_j = \pm\pi/2, j = 2, 4, 6, \dots; k = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

и ряда нечетных производных по углам с нечетными номерами

$$\frac{\partial f_3}{\partial \alpha_3} = 0, \frac{\partial f_5}{\partial \alpha_5} = \frac{\partial^3 f_5}{\partial \alpha_5^3} = 0, \quad \frac{\partial f_7}{\partial \alpha_7} = \frac{\partial^3 f_7}{\partial \alpha_7^3} = \frac{\partial^5 f_7}{\partial \alpha_7^5} = 0, \dots \alpha_j = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (22)$$

Полагая в общем случае невозможным взять интегралы аналитически, предложим численный метод интегрирования на основе полученных результатов и опишем вытекающий отсюда алгоритм вычислений по шагам.

Численный метод интегрирования функций внутри замкнутой гладкой области в многомерных сферических координатах

0. Зафиксируем углы $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}$ как параметры и допустим, что найдена численно или аналитически длина радиус-вектора от начала координат до точки пересечения с поверхностью, ограничивающей область интегрирования $R_{\text{end}} \equiv R_{\text{end}}(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2})$.

Обозначим интегрируемую функцию по радиусу r , как по аргументу. В ней углы $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}$ являются параметрами:

$$F_0(r) \equiv F_0(r/\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}) = r^{n-1} F(r/\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}). \quad (23)$$

Значения производных нечетных порядков от подынтегральной функции в начале и конце интервала, обозначим соответственно

$$F_0^{(2k-1)}(0) = \frac{\partial^{2k-1} F_0}{\partial r^{2k-1}} \Big|_{r=0} \text{ и } F_0^{(2k-1)}(R_{\text{end}}) = \frac{\partial^{2k-1} F_0}{\partial r^{2k-1}} \Big|_{r=R_{\text{end}}} \quad (24)$$

Представим внутренний интеграл по радиусу, применяя формулу Эйлера–Маклорена [3], в виде приближенных конечных сумм из N ненулевых отсчетов подынтегральной функции и m уточняющих поправок, учитывающих разности нечетных производных на концах интервала интегрирования:

$$I_0 \equiv I_0(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}) = \int_0^{R_{\text{end}}} F_0(r) dr \approx \sum_{i=1}^{N-1} F_0(i\Delta r) \Delta r + \frac{1}{2} F_0(R_{\text{end}}) \Delta r + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} \Delta r^{2k} [F_0^{(2k-1)}(0) - F_0^{(2k-1)}(R_{\text{end}})], \quad (25)$$

где $\Delta r = R_{\text{end}}/N$ – шаг суммирования отсчетов функции.

При этом на первом шаге (и далее) положим, что используется формула Эйлера–Маклорена.

1. Последующий интеграл по углу α_0 (при фиксированных углах $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-3}, \alpha_{n-2})$) представим в виде конечной приближенной суммы из N_0 отсчетов подынтегральной функции:

$$I_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}) = \int_0^{2\pi} \cos^0 \alpha_0 I_0(\alpha_0/\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}) d\alpha_0 \approx \sum_{i=0}^{N_0-1} f_0(i\Delta\alpha_0/\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}) \Delta\alpha_0, \quad (26)$$

где $\Delta\alpha_0 = 2\pi/N_0$.

Уточняющих поправок не требуется, так как в начале и конце интервала интегрирования при $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_0 = 2\pi$ радиус-вектор имеет равные направляющие косинусы (3), попадая на одно и то же пространственное направление. Следовательно, подынтегральная функция является периодической по углу α_0 (период равен 2π) и поэтому разности всех производных и соответствующих им уточняющих поправок равны нулю.

2. Следующий интеграл по углу α_1 представим в виде конечной суммы из $(N_1 - 1)$ отсчетов и, например, пяти уточняющих поправок:

$$I_2(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-2}) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_1(\alpha_1) d\alpha_1 \approx \sum_{i=1}^{N_1-1} f_1(-\frac{\pi}{2} + i\Delta\alpha_1) + \sum_{k=1}^5 \frac{B_{2k}}{(2k)!} \Delta\alpha_1^{2k} [f_1^{(2k-1)}(-\pi/2) - f_1^{(2k-1)}(\pi/2)], \quad (27)$$

где $\Delta\alpha_1 = \pi/N_1$;

$f_1(\alpha_1)$ и $f_1^{(2k-1)}(\pm\pi/2)$ – подынтегральная функция и ее производные, определенные в соответствии с (23) и (24).

Здесь и далее ограничимся практическим и очевидным случаем, когда заведомо нулевые отсчеты отбрасываются: $f_j(\alpha_j = \pm \pi/2) = 0$, так как $\cos^j(\pm \pi/2) = 0$.

Производные нечетных порядков от подынтегральной функции $f_1(\alpha_1) = \cos^1 \alpha_1 I_1(\alpha_1)$, применяя формулы многократного дифференцирования произведений, удобно рассчитывать через производные четных порядков (на один порядок ниже) функции $I_1(\alpha_1)$. Приведем эту связь между численными значениями производных до 9-го и 8-го порядков при $\alpha_1 = \pm \pi/2$:

$$\left. \begin{aligned} f_1^{(1)} &= -I_1, f_1^{(3)} = -3I_1^{(2)} + I_1, f_1^{(5)} = -5I_1^{(4)} + 10I_1^{(2)} - I_1, \\ f_1^{(7)} &= -7I_1^{(6)} + 35I_1^{(4)} - 21I_1^{(2)} + I_1, \\ f_1^{(9)} &= -9I_1^{(8)} + 84I_1^{(6)} - 126I_1^{(4)} + 36I_1^{(2)} - I_1. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

На основе формул (28) можно рассчитать для приближенной суммы (27) пять уточняющих поправок на ошибки до 10-го порядка малости, включительно.

3. Из свойства (21) следует, что все уточняющие поправки в применяемой формуле Эйлера–Маклорена равны нулю и следующий интеграл по углу α_2 заменяется конечной суммой из $(N_2 - 1)$ отсчетов:

$$\begin{aligned} I_3 &= I_3(\alpha_3, \dots, \alpha_{n-3}, \alpha_{n-2}) = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \alpha_2 I_2(\alpha_2/\alpha_3, \dots, \alpha_{n-3}, \alpha_{n-2}) d\alpha_2 \approx \\ &\approx \sum_{i=1}^{N_2-1} \cos^2 \left(-\frac{\pi}{2} + i\Delta\alpha_2\right) I_2\left(-\frac{\pi}{2} + i\Delta\alpha_2\right) \Delta\alpha_2, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\Delta\alpha_2 = \pi/N_2$.

4. Интеграл по углу α_3 вычислим как конечную сумму, взяв пять уточняющих поправок на ошибки до 12-го порядка малости, включительно:

$$\begin{aligned} I_4(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_{n-2}) &= \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_3(\alpha_3) d\alpha_3 \approx \sum_{i=1}^{N_3-1} f_3\left(-\frac{\pi}{2} + i\Delta\alpha_3\right) + \\ &+ \sum_{k=2}^6 \frac{B_{2k}}{(2k)!} \Delta\alpha_3^{2k} [f_3^{(2k-1)}(-\pi/2) - f_3^{(2k-1)}(+\pi/2)], \end{aligned} \quad (30)$$

где $\Delta\alpha_3 = \pi/N_3$.

При этом, как и на втором шаге, можно воспользоваться аналогичными связями между производными при $\alpha_3 = \pm \pi/2$:

$$\left. \begin{aligned} f_3^{(1)} &= 0, f_3^{(3)} = -6I_3, f_3^{(5)} = -60I_3^{(2)} + 60I_3, \\ f_3^{(7)} &= -210I_3^{(4)} + 1260I_3^{(2)} - 546I_3, \\ f_3^{(9)} &= -504I_3^{(6)} + 7560I_3^{(4)} - 19656I_3^{(2)} + 4920I_3, \\ f_3^{(11)} &= -990I_3^{(8)} + 27720I_3^{(6)} - 80180I_3^{(4)} + \\ &+ 27060I_3^{(2)} - 44286I_3. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Необходимые производные вида $I_1^{(2m)}$ по углу α_1 на предшествующем втором шаге, $I_3^{(2m)}$ по углу α_3 на данном четвертом шаге и т. д. (по углам $\alpha_5, \alpha_7, \dots$ на последующих четных шагах) удобно вычислять численно по четырем узлам, используя четность функций – интегралов $I_1, I_3, I_5, \dots$ относительно полюсов:

$$\left. \begin{aligned} I_j^{(2)} &\approx [8064I_j(1) - 1008I_j(2) + 128I_j(3) - 9I_j(4)] / (2520\delta\alpha_j^2), \\ I_j^{(4)} &\approx [-1952I_j(1) + 676I_j(2) - 96I_j(3) + 7I_j(4)] / (120\delta\alpha_j^4), \\ I_j^{(6)} &\approx [116I_j(1) - 52I_j(2) + 12I_j(3) - I_j(4)] / (2\delta\alpha_j^6), \\ I_j^{(8)} &\approx [-112I_j(1) + 56I_j(2) - 16I_j(3) + 2I_j(4)] / \delta\alpha_j^8, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

где $I_j(i) \equiv I_j(\pm \pi/2 + i\delta\alpha_j)$ – первый отсчет функции, четной относительно $\alpha_j = \pm \pi/2$; $j = 1, 3, 5, \dots$; $i = 1, 2, 3, 4$; $\delta\alpha_j$ – выбранный шаг численного дифференцирования.

5. Следующий интеграл по углу α_4 представим суммой отсчетов без уточняющих поправок, аналогично, как и на третьем шаге по углу α_4 , и т. д.

На последующих четных шагах (как и на предшествующем четвертом шаге) можно использовать полезное свойство (22), например, для уменьшения порядка малости ошибки при сохранении количества отсчетов численного дифференцирования.

Итак, в предлагаемом алгоритме интегралы по радиусу – r и углам с нечетными индексами – $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots$ рассчитываются как суммы с уточняющими поправками, а интегралы по углам с четными индексами $\alpha_0, \alpha_2, \alpha_4, \dots$ – без этих поправок. При этом циклы вычислений по углам α_j организуются как внутренние циклы по отношению к циклам по углам α_{j+1} , самый внутренний цикл вычислений – по радиусу. Необходимый переход от многомерных прямоугольных координат к сферическим осуществляется по формулам (2) и (3).

Предлагаемый метод численного интегрирования в многомерных сферических координатах удобен тем, что во многих практических случаях гладкая замкнутая область интегрирования в угловых пределах является параллелепипедом и при разбиении не имеет элементарных граничных участков, частично не попадающих в нее. В сравнении с методом Монте-Карло [4], который дает лишь вероятностные оценки искомых интегралов, в предлагаемом методе не требуется громоздкого статистического моделирования распределений случайных величин. Обнаруженные свойства четности подынтегральных функций относительно полюсов по углам с четными номерами позволяют рассчитывать интегралы в виде конечных сумм [рассмотрение погрешностей из-за несходимости рядов вида (25) выходит за рамки статьи]. Результаты изложены по убывающей общности, также возможны изменения и развития алгоритма в интересах пользователя. Так, при численном интегрировании по нечетным углам можно использовать не только формулу Эйлера–Маклорена, но и другие известные способы уточнения.

Примеры численного интегрирования в многомерных сферических координатах

Приведем два примера решения задач, которые иллюстрируют использование метода и подтверждают его достоверность. Каждая задача решается дважды на основе известного метода и предлагаемого. Известный метод является точным и эталонным, предлагаемый – приближенным и тестируемым. Результаты решения предлагаемым методом сходятся к точным результатам.

Пример 1. Вычислить полярный момент второго порядка для четырехмерного эллипсоида с единичной равномерной плотностью. Уравнение эллипсоида:

$$\frac{(x_0 - 0,9)^2}{6^2} + \frac{(x_1 - 1,1)^2}{10^2} + \frac{(x_2 - 1,5)^2}{12^2} + \frac{(x_3 - 1,7)^2}{16^2} = 1. \quad (33)$$

Центр этого эллипсоида смещен в точку с координатами

$$\mathbf{R}_c = [x_{c0}, x_{c1}, x_{c2}, x_{c3}]^T = [0,9; 1,1; 1,5; 1,7]^T. \quad (34)$$

Полярный момент второго порядка рассчитывается относительно полюса – начала координат и равен интегралу от квадрата радиус-вектора по объему, заключенному внутри поверхности эллипсоида:

$$M_P = \int_V \rho(R) R^2 dV, \quad (35)$$

где $\rho(R)$ – удельная плотность, как функция радиус-вектора (далее для упрощения примера примем $\rho(R) = \text{const} = 1$).

Можно показать, что полярный момент второго порядка смещенного эллипсоида равен

$$M_{PA} = M_{PCA} + V_A \|\mathbf{R}_c\|^2, \quad (36)$$

где M_{PCA} – полярный момент централизованного эллипсоида; V_A – его объем; $\|\mathbf{R}_c\|^2 = (x_{c0})^2 + (x_{c1})^2 + (x_{c2})^2 + (x_{c3})^2$ – квадрат нормы вектора $\mathbf{R}_c$.

Данный эллипсоид (33) получается из шара с радиусом $r_0 = 2$ при коэффициентах растяжения по соответствующим осям $k_0 = 3$, $k_1 = 5$, $k_2 = 6$ и $k_3 = 8$ раз. Тогда, используя свойства подобия и формулу (12) при $n = 4$, получим

$$M_{PA}^{(COR)} = k_V (M_{PS}/4) \\ (k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) + k_V V_S \|\mathbf{R}_c\|^2, \quad (37)$$

где $k_V = k_0 k_1 k_2 k_3$ – коэффициент увеличения объема;

$$V_S = 2\pi^2 r_0^4 / 4 \text{ и } M_{PS} = 2\pi^2 r_0^6 / 6 \quad (38)$$

– объем и полярный момент соответствующего шара. Подставляя в формулы (36) и (37) необходимые величины, рассчитаем численное значение полярного момента эллипсоида, которое и примем за точное (корректное):

$$M_{PA}^{(COR)} = 5\,485\,541,917\dots \quad (39)$$

Полярный момент в сферических координатах несложно привести к интегралу:

$$M_{PA} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \alpha_2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha_1 \times \\ \times \int_0^{2\pi} [R_{end}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)]^6 d\alpha_0 d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (40)$$

где $R_{end}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ – конечная длина радиус-вектора, исходящего из начала координат в направлении, заданном углами $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, до точки его пересечения с поверхностью эллипсоида. Чтобы найти это значение, необходимо уравнения связи (3) при $n = 4$ подставить в уравнение эллипсоида (13) и, решая получившееся квадратное уравнение относительно r , выбрать положительное значение корня (это тривиальное решение здесь не приводится). 0-й шаг алгоритма – вычисление $[R_{end}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)]^6$ в этом примере производится аналитически без шагов по Δr . Производя оставшиеся шаги по углам $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ согласно описанному алгоритму, вычислим приближенное (аппроксимированное) значение полярного момента эллипсоида $M_{PA}^{(APPR)}$.

Пример 2. Вычислить объем шестимерного эллипсоида

$$\frac{x_0^2}{3,9^2} + \frac{x_1^2}{3,9^2} + \frac{x_2^2}{3,9^2} + \frac{(x_3 - 1,2)^2}{5,1^2} + \\ + \frac{(x_4 - 1,5)^2}{6,9^2} + \frac{(x_5 - 2,1)^2}{5,7^2} = 1. \quad (41)$$

Этот эллипсоид получается из шара радиусом $r_0 = 3$ при его растяжении по соответствующим осям в $k_0 = k_1 = k_2 = 1,3$ и $k_3 = 1,7$, $k_4 = 2,3$, $k_5 = 1,9$ раз. Тогда объем данного шестимерного эллипсоида больше объема соответствующего шестимерного шара V_S в $k_0 k_1 \dots k_5$ раз. Подставляя необходимые величины $n = 6$ и $r_0 = 3$ в формулу (12), рассчитываем численное значение объема эллипсоида, которое будем принимать за точное:

$$V_A^{(COR)} = k_0 k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 V_S = 61\,487,425\dots \quad (42)$$

Во втором примере уравнение эллипсоида (41) специально задано так, что длина радиус-вектора R_{end} не зависит от углов α_0 и α_1 , а зависит только от углов α_2, α_3 и α_4 (что несложно показать). Кроме того, в обоих примерах центры эллипсоидов специально смещены относительно начала координат, чтобы уничтожить осевую симметрию, которая препятствовала бы проверке свойств четности интегралов относительно полюсов. Записывая соответствующую формулу для объема и взяв первые три внутренних интеграла по r, α_0 и α_1 аналитически, (т. е. выполняя 0-й, 1-й и 2-й шаги алгоритма), получаем

$$V_A = \frac{2\pi}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \alpha_4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \alpha_3 \times$$

$$\times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \alpha_2 [R_{\text{end}}(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)]^6 d\alpha_2 d\alpha_3 d\alpha_4. \quad (43)$$

(Аналитическое интегрирование введено для того, чтобы снизить количество необходимых вычислений на три порядка и соответственно иметь возможность по быстродействию рассчитать этот пример на ПК). Далее, производя 3-й, 4-й и 5-й шаги алгоритма – численное интегрирование по углам α_2 , α_3 и α_4 , вычисляем приближенное (аппроксимированное) значение объема эллипсоида $V_A^{(APPR)}$. Результаты решения примеров сведены в таблице.

Искомые величины – полярный момент четырехмерного и объем шестимерного эллипсоидов – вычислялись с точностью до ошибок от 2-го до 12-го и от 4-го до 14-го порядков малости, соответственно. Фактические относительные ошибки вычислений при порядках малости $2k$ соответственно равны

$$\delta_{\text{Rel-F}}(M) = \frac{M_{PA}^{(APPR)} - M_{PA}^{(COR)}}{M_{PA}^{(COR)}};$$

$$\delta_{\text{Rel-F}}(V) = \frac{V_A^{(APPR)} - V_A^{(COR)}}{V_A^{(COR)}}.$$

Минимальные относительные ошибки достигают десятичных порядков 10^{-14} – 10^{-15} .

Величины, которыми аппроксимировались фактические относительные ошибки вычислений $2k$ -го порядков малости (и которые можно принять за относительные теоретические ошибки), составляют

$$\delta_{\text{Rel-T}} = B_{2k} \Delta \alpha_j^{2k} [f_j^{(2k-1)}(-\pi/2) - f_j^{(2k-1)}(+\pi/2)] / (2k)!, \quad (44)$$

где $j = 3$ и $j = 5$ при вычислении полярного момента и объема, соответственно. Также в таблице приводится относительное расхождение между истинными относительными ошибками и соответствующими аппроксимирующими величинами:

$$\delta \delta_{\text{Rel}} = (\delta_{\text{Rel-T}} - \delta_{\text{Rel-F}}) (\delta_{\text{Rel-F}})^{-1} 100\%.$$

Эти расхождения не превышают –6,47 % для первого и –5,18 % для второго примеров, т. е. фактические относительные ошибки с порядком мало-

сти $2k$ можно аппроксимировать первым отброшенным членом вида (44) (если, разумеется, предшествующие интегралы с меньшей кратностью вычислены более точно).

Шаг численного дифференцирования в обоих примерах выбран равным $\delta \alpha_1 = \delta \alpha_3 = 1/256$. Количество циклов по углам для первого и второго примеров соответственно равны

$N_0 = 128$, $N_1 = N_2 = 64$; $N_2 = N_3 = N_4 = 64$. Относительные ошибки с повышением порядка малости уточняющих поправок уменьшаются на два порядка.

О применении численного интегрирования в многомерных сферических координатах для некоторых задач статистической радиотехники

Разработанный автором метод численного интегрирования был практически использован и апробирован в вышеназванных применениях. Приведем две задачи в общем виде, для решения которых предлагаемый метод оказался удобным и целесообразным.

Задача 1. Найти вероятность P попадания многомерного вектора ошибки $\mathbf{R} = [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]^T$ в определении параметров сигнала в некоторую область V , заключенную внутри поверхности $S \equiv S(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = C$, при функции плотности распределения вероятностей ошибок $f \equiv f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$, которая в общем случае не интегрируется аналитически:

$$P \equiv P(\mathbf{R} \in V) = P[S(\mathbf{R}) < C] = \int_V f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) dx_0 dx_1 \dots dx_{n-1}. \quad (45)$$

В статистической радиотехнике, теории автоматического управления, навигации и других областях часто рассчитывают вероятность того, что модуль многомерного вектора ошибок не превысит заданный радиус. При этом поверхность S , ограничивающая область интегрирования, превращается в n -мерную сферу и очевидно удобство перехода к многомерным сферическим координатам, заключающееся в том, что пределы интегрирования по радиусу и по

Порядок малости ошибки $2k$	Ошибки вычисления M_{PA} , $n = 4$			Ошибки вычисления V_A , $n = 6$		
	$\delta_{\text{Rel-F}}(M)$	$\delta_{\text{Rel-T}}(M)$	$\delta \delta_{\text{Rel}}(M)$, %	$\delta_{\text{Rel-F}}(V)$	$\delta_{\text{Rel-T}}(V)$	$\delta \delta_{\text{Rel}}(V)$, %
2	$-6,12 \cdot 10^{-4}$	$-6,11 \cdot 10^{-4}$	–0,09	–	–	–
4	$-5,36 \cdot 10^{-7}$	$-5,33 \cdot 10^{-7}$	–0,41	$-7,48 \cdot 10^{-7}$	$-7,43 \cdot 10^{-7}$	–0,70
6	$-2,19 \cdot 10^{-9}$	$-2,17 \cdot 10^{-9}$	–0,87	$-5,25 \cdot 10^{-9}$	$-5,19 \cdot 10^{-9}$	–1,13
8	$-1,90 \cdot 10^{-11}$	$-1,87 \cdot 10^{-11}$	–1,44	$-5,91 \cdot 10^{-11}$	$-5,81 \cdot 10^{-11}$	–1,70
10	$-2,74 \cdot 10^{-13}$	$-2,56 \cdot 10^{-13}$	–6,47	$-1,01 \cdot 10^{-13}$	$-9,80 \cdot 10^{-13}$	–2,46
12	$-1,84 \cdot 10^{-14}$	–	–	$-2,47 \cdot 10^{-14}$	$-2,35 \cdot 10^{-14}$	–5,18
14	–	–	–	$-1,30 \cdot 10^{-15}$	–	–

углам становятся независимыми. Если ограничивающая поверхность не является сферой, то следует от уравнения поверхности

$$S(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = C$$

перейти к уравнению ее радиус-вектора как функции углов:

$$R_{\text{end}} \equiv R_{\text{end}}(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}).$$

Соответствующий переход делается и в подынтегральной функции:

$$F(x_0, x_1, \dots, x_n) \rightarrow F[R(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})].$$

Задача 2. Найти моменты для распределения на области определения V :

$$M(p_0, p_1, \dots, p_{N-1}) = \int_V x_0^{p_0} x_1^{p_1} \dots x_{N-1}^{p_{N-1}} f(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) dx_0 dx_1 \dots dx_{N-1}, \quad (46)$$

где $p_0, p_1, \dots, p_{N-1} = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Эта задача встречается в статистике и ее технических приложениях. При не интегрируемой аналитически функции распределения искомые моменты можно определить предлагаемым численным методом. В общем случае область интегрирования V может иметь и бесконечную протяженность, при условии сходимости соответствующих интегралов (45), (46).

Возможные применения многомерных сферических координат для поиска экстремума на поверхностях и для некоторых других задач

Многомерные сферические координаты можно рассматривать как частный случай многомерных криволинейных координат. Переход к каким-либо криволинейным координатам от прямоугольных может определяться различными соображениями, в частности, удобством поиска экстремума функций и функционалов на поверхностях. Эти задачи оптимизации при ограничениях, встречающиеся, например, в теории управления и навигации [5], решаются методом неопределенных множителей Лагранжа [6, 7]. Однако, когда минимизируемая (или максимизируемая) функция характерно зависит от радиального направления, можно перейти к сферическим координатам и решать задачу прямым методом. При этом количество аргументов поиска экстремума становится равным числу степеней свободы в экстремальной задаче, т. е. устраняется неопределенность.

Пример. Найти минимальное и максимальное собственные числа матрицы квадратической формы и соответствующие им собственные векторы:

$$F(\mathbf{R}) = 0,5 \langle \mathbf{R}, \mathbf{M} \mathbf{R} \rangle, \quad (47)$$

где $\mathbf{R} = [x_0, x_1, x_2, x_3]^T$ – четырехмерный вектор прямоугольных координат;

$$\mathbf{M} \approx \begin{bmatrix} 4,1908 & 2,7032 & -0,8016 & 1,2733 \\ 2,7032 & 5,7507 & 2,2245 & 0,9414 \\ -0,8016 & 2,2245 & 8,1563 & -0,1829 \\ 1,2733 & 0,9414 & -0,1829 & 9,2522 \end{bmatrix}$$

– матрица квадратической формы, которая сформирована на основе канонического жорданового разложения так, что ее собственные числа в точности равны

$$\lambda_i = \{1,530 \ 6,240 \ 9,210 \ 10,37\}, \quad i=0, 1, 2, 3.$$

При этом собственные нормированные векторы ($\|\mathbf{e}_i\| = 1$), соответствующие минимальному и максимальному собственным числам, равны

$$\mathbf{e}_0 = [0,731231 \ -0,614461 \ 0,293668 \ -0,038707]^T;$$

$$\mathbf{e}_3 = [0,327727 \ 0,495632 \ 0,318361 \ 0,738641]^T.$$

Подставляя в равенство (47) уравнения связи (2) и (3) при $n = 4$, получаем уравнение квадратической формы в виде

$$F(\mathbf{R}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = 0,5 R^2 F_S,$$

где $F_S \equiv F_S(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = \langle \mathbf{e}, \mathbf{M} \mathbf{e} \rangle$ – значение квадратической формы на единичной четырехмерной сфере;

$\mathbf{e} = [cs_2 cs_1 cs_0, cs_2 cs_1 sn_0, cs_2 sn_1, sn_2]^T$ – единичный вектор направления, где $cs_i \equiv \cos \alpha_i$, $sn_i \equiv \sin \alpha_i$, $i = 0, 1, 2$.

Квадратическая форма приводится к каноническому виду

$$F = 0,5(\lambda_0 u_0^2 + \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \lambda_3 u_3^2). \quad (48)$$

Дифференцируем дважды (47) и (48) и сопоставляем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial R^2} = F_S(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \text{ и } \frac{\partial^2 F}{\partial u_i^2} = \lambda_i. \quad (49)$$

Из формулы (49) можно заключить, что минимальное значение второй производной от квадратической формы по радиусу F_S будет получено тогда, когда единичный вектор направления $\mathbf{e}$ совпадет с направлением оси $0U_j$, которой соответствует минимальное собственное число $\lambda_j = \lambda_{\min}$; максимум F_S также будет достигаться при аналогичном совпадении:

$$\min\{F_S(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)\} = \lambda_{\min} \text{ и } \max\{F_S(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)\} = \lambda_{\max}.$$

Таким образом задача сводится к поиску экстремумов квадратической формы на единичной сфере. Минимум (максимум) несложно найти градиентным методом, соответственно как

$$\alpha_{m+1} = \alpha_m \mp k_{\text{reg}} \nabla \mathbf{F}_S,$$

где $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]^T$ – вектор углов;

$$\nabla \mathbf{F}_S = \left[\frac{\partial F_S}{\partial \alpha_0}, \frac{\partial F_S}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial F_S}{\partial \alpha_2} \right]^T$$

– вектор первых производных (аналитические выражения для производ-

ных здесь не приводятся); k_{reg} – регулировочный коэффициент, m – номер итерации.

В этой задаче минимальное и максимальное собственные числа находятся, например, за 16 и 32 итерации, соответственно, с относительными погрешностями

$$\delta(\lambda_0) = 0,618 \cdot 10^{-7} \delta(\lambda_3) = 0,119 \cdot 10^{-7},$$

а нормированные собственные векторы находятся с угловой ошибкой в направлении

$$\delta \mathbf{e}_0 = 0,142 \cdot 10^{-3} \text{ рад}, \delta \mathbf{e}_1 = 0,100 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$$

от нулевого приближения, в качестве которого было выбрано направление по оси OX_0 ($\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$). Минимальное собственное число для корреляционной матрицы шума может использоваться, например, для расчета обобщенной дисперсии [8]:

$$D = E/\lambda_{\min},$$

где E – энергия сигнала.

Оба числа – минимальное и максимальное – могут использоваться, например, как границы диапазона прогонки при решении характеристического уравнения и т. д. В этом простом иллюстративном примере итерации сходятся к искомым решениям и от других начальных приближений с погрешностями такого же порядка. Однако в экстремальных задачах функция может иметь несколько экстремумов на поверхности поиска. Тогда направляющие косинусы удобны для задания различных начальных приближений, от которых и начинается движение к экстремуму, так как можно упорядоченно перебирать пространственные направления и соответствующие им точки пересечения на поверхностях.

Следует упомянуть еще об одной интересной возможности приложения формул для направляющих косинусов в виде (3). В теории управления или навигации может встретиться задача аппроксимации траектории движения системы в многомерном пространстве состояний (или параметров), или аналогичная задача управления системой. При этом вектор состояния или параметров системы $\mathbf{R} = [x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]^T$ является функцией времени, где в общем случае могут быть неизвестны (или безразличны) как функциональная зависимость, так и отсчеты времени.

Введем некоторые аппроксимирующие функции от времени $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-2}(t)$ таким образом, что

обобщенные скорости системы $x_i' \equiv \frac{dx_i}{dt}$ будут выражены как направляющие косинусы

$$x_0' = \cos \alpha_0(t) \cos \alpha_1(t) \dots \cos \alpha_{n-2}(t),$$

$$x_1' = \cos \alpha_0(t) \cos \alpha_1(t) \dots \sin \alpha_{n-2}(t),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_{n-1}' = \sin \alpha_0(t).$$

При таком задании появляется удобное и полезное свойство

$$S(T) = \int_0^T \|V\| dt = T, \quad (50)$$

где $S(T)$ – путь, проходимый системой в пространстве состояний за условное время T ;

$\|V\| = [(x_0')^2 + (x_1')^2 + \dots + (x_{n-1}')^2]^{1/2}$ – модуль скорости. Известно, что одной траектории в пространстве может соответствовать множество функций времени $\mathbf{R}(t)$. Свойство (50) позволяет автоматически ввести нормировку и избавиться от неопределенности.

Из существующей литературы известны и другие способы задания многомерных сферических координат, которые используются, например, для задач квантования [9].

Автор выражает благодарность коллеге по работе – доценту кафедры №42 СПбГУАП С. Н. Воробьеву, который инициировал автора к написанию статьи и дал необходимые ценные советы.

Литература

1. Смирнов В. И. Курс высшей математики. – Т.2. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1953. – 627 с.
2. Возенкрафт Дж., Джекобс И. Теоретические основы техники связи. – М.: Мир, 1969. – 640 с.
3. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. – М.: ГИФМЛ, 1968. – 659 с.
4. Кетков Ю. Л., Кетков А. Ю., Шульц М. М., MATLAB 6. x: Программирование численных методов. – СПб.: «БХВ-Петербург», 2004. – 662 с.
5. Алексеев В. И., Кориков А. М., Полонников Р. И., Тарасенко В. П., Экстремальная радионавигация. – М.: Наука, 1978. – 279 с.
6. Булдырев В. С., Павлов Б. С. Линейная алгебра и функции многих переменных. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. – 496 с.
7. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 518 с.
8. Нестерук В. Ф. О влиянии формы сигнала на его обнаружение при нормальных коррелированных помехах // Радиотехника и электроника. – 1963. – № 8. – С. 1319–1325.
9. Peter F., Swaszek, John B. Thomas Multidimensional spherical coordinats. Quantization // IEEE. Transfction of information theory. – Vol. It-29. – N 4. – July 1983. – С. 570–576.